2/5/17 Μαθημα 14.

Δακτυλιοι

Ομαδα $(O,\cdot)$

$(\mathbb{Z},+)$ ομαδα κ $(\mathbb{Z},\cdot)$ μονοειδες (δεν εχει αντιστροφους)

συνδεονται με την επιμεριστική ιδιοτητα:

$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ και αυτες συνδεονται μεταξυ τους.

$(\mathbb{Z}_6,\oplus,\odot)$

(το $\mathbb{Z}_6$ με την προσθεση): $(\mathbb{Z}_6,\oplus)$ είναι αβελιανη ομαδα

(το $\mathbb{Z}_6$ με τον πολ/σμο): $(\mathbb{Z}_6,\odot)$ είναι αβελιανο μονοειδες

+ επιμεριστική ιδιοτητα.

Στο $\mathbb{Z}$ αν πολ/σω δυο ακεραιους π.χ. $\alpha b=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha$ ή $b=0$.

Στο $\mathbb{Z}_6$ όμως $[2]\odot[3]=[0]$ και $[2],[3]\neq 0$.

μηδενοδιαιρετες

Το $\mathbb{Z}_8$ $[2]^3=[0]$ το στοιχειο αυτο λεγεται μηδενοδυναμο

Το $\mathbb{Z}_p$ οταν p πρωτος δεν εχει μηδενοδιαιρετες

Ορισμος:

Ενα συνολο R(ring) εφοδιασμενο με δυο πραξεις $\oplus,\odot$ ωστε:

1) $(R,\oplus)$ αβελιανη ομαδα

2) $(R,\odot)$ ημιομαδα

3) να ισχυει η επιμεριστική ιδιοτητα $r_1\odot(r_2\oplus r_3)=(r_1\odot r_2)\oplus(r_1\odot r_3)$

Αν επιπλεον $\exists e\in R$ ωστε $r\odot e=r=e\odot r$ $\forall r\in R$

ο δακτυλιος θα καλειται μοναδιαιος.

Αν στον δακτύλιο R ισχύει $r_1 \odot r_2 = r_2 \odot r_1$ $\forall r_1, r_2 \in R$ τότε ο R θα καλείται <u>αντιμεταθετικός</u>

<u>π.χ.</u> $\mathbb{Z}$ αντιμεταθετικός μοναδιαίος δακτύλιος (δεν έχει αντίστροφους)

- Αν ο R είναι μοναδιαίος και <u>το στοιχείο</u> r έχει την ιδιότητα να έχει ένα $r' \in R$ ώστε $r \odot r' = e$, τότε το r θα λέμε ότι έχει δεξιό αντίστροφο.
- Αν $r' \odot r = e$ θα λέμε ότι το r θα λέμε ότι έχει αριστερό αντίστροφο.
- Αν το r έχει δεξιό και αριστερό αντίστροφο τότε θα καλείται μονάδα.

<u>π.χ.</u> Το $\mathbb{Z}$ έχει τα $\{-1, 1\}$ μονάδες.
Το $\mathbb{Q}^*$ περιέχει όλες τις μονάδες.

Αν ο R είναι αντιμεταθετικός μοναδιαίος δακτύλιος και $R^* = R - \{0_{\oplus}\}$ είναι όλα τα στοιχεία του μονάδες τότε θα καλείται <u>σώμα</u>. π.χ. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$ με p πρώτο, σώματα.
Αν ο R είναι μοναδιαίος και το R^* είναι όλα τα στοιχεία του μονάδες τότε θα καλείται <u>διαιρετικός δακτύλιος</u>

<u>π.χ.</u>

1) $2\mathbb{Z}$ είναι αντιμεταθετική ομάδα
το $2\mathbb{Z}$ είναι αντιμεταθετικός, μη-μοναδιαίος.

2) $R = \{n + m\sqrt{2} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ με την πρόσθεση και τον πολλ/σμό όπως γνωρίζουμε.
$1 + 3\sqrt{2} \in R$, $R \subseteq \mathbb{R}$
αν προσθέσω: $(n + m\sqrt{2}) + (n' + m'\sqrt{2}) = (n + n') + (m + m')\sqrt{2} \in R$
είναι καλά ορισμένη στην πρόσθεση
$(R, +)$ αβελιανή ομάδα

$(n+m\sqrt{2})(n'+m'\sqrt{2}) = (nn'+2mm') + (nm'+n'm)\sqrt{2}$ καλά ορισμένο.

R είναι αντιμεταθετικός μοναδιαίος

π.χ.
Το 2 στο $\mathbb{Z}$ γράφεται:

$2 = 1\cdot 2 = 2\cdot 1 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ ένα στοιχείο χρειάζεται να γράφεται με 2 διαφορετικούς τρόπους

ίδιος τρόπος

π.χ.
$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R} = \{(a,b) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$

$(\alpha,b)+(a',b') = (\alpha+\alpha', b+b')$

$(\alpha,b)\cdot(\alpha',b') = (aa', bb')$

$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ δακτύλιος, επιμεριστική

$(\alpha,b)[(\alpha_1,b_1)+(\alpha_2,b_2)] =$

$(\alpha,b)(\alpha_1+\alpha_2, b_1+b_2) = (\alpha(\alpha_1+\alpha_2), b(b_1+b_2)) =$

$= (\alpha\alpha_1+\alpha\alpha_2, bb_1+bb_2) = (\alpha,b)(\alpha_1,b_1)+(\alpha,b)(\alpha_2,b_2)$

Μοναδιαίος με μοναδιαίο στοιχείο $(1,1)$

Αντιμεταθετικός

$(1,0)\neq(0,0)$ όχι διαιρετικός

$(\alpha,b)(\alpha',b') = (1,1)$?? έχει τέτοια στοιχεία $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha,b)$ μονάδα $\Leftrightarrow \alpha\cdot b\neq 0$.

(α,b) μηδενοδιαιρέτης $\Leftrightarrow \alpha b = 0$ με $a^2+b^2>0$

όχι και τα 2 μηδέν

$(a,b)^k = (0,0)$ υπάρχουν τέτοια στοιχεία ?? Όχι

δεν έχει μηδενοδύναμο. (όχι το 0 βέβαια)

Ορισμός: Έστω $R_1, \dots, R_n$ δακτύλιοι. Ορίζεται το ευθύ άθροισμα $R_1 \oplus \dots \oplus R_n$ να είναι το σύνολο $R_1 \times \dots \times R_n$ με πράξεις κατά συντεταγμένες

$(r_1, \dots, r_n) + (r_1', \dots, r_n') = (r_1 + r_1', \dots, r_n + r_n')$

$(r_1, \dots, r_n) \cdot (r_1', \dots, r_n') = (r_1 r_1', \dots, r_n r_n')$

Πρόταση: Το ευθύ άθροισμα δακτυλίων είναι δακτύλιος.
Είναι μοναδιαίος αν κάθε R_i είναι.
Είναι αντιμεταθετικός αν κάθε R_i είναι.

Ασκήσεις

Παρατήρηση 1) Ο τετριμμένος δακτύλιος $R = \{0\}$
Υποθέτουμε ότι οι δακτύλιοι θα έχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία.

2) $(G, +)$ αβελιανή ομάδα γίνεται δακτύλιος.
$\alpha \cdot b = 0 \ \forall \alpha, b$

3) $M(n \times n, \mathbb{R})$ είναι δακτύλιος με τη συνήθη πρόσθεση και πολ/μό πινάκων.
Όχι αντιμεταθετικός. ΝΑΙ μοναδιαίος

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ μηδενοδύναμο + μηδενοδιαιρέτης.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω R δακτύλιος και $\alpha, b \in R$:

1) $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0 \leftarrow$ μηδενικό της πρόσθεσης $(R, +)$
2) $\alpha \cdot (-b) = -\alpha b = (-\alpha) b$
3) $(-\alpha)(-b) = \alpha b$
4) ΠΡΟΣΟΧΗ ! $m(\alpha b) = (m\alpha) b = \alpha (m b)$ με $m \in \mathbb{Z}$
5) $(mn)\alpha = m(n\alpha)$ $m, n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $\alpha \in (R, +)$ αβελιανή. Ορίζεται $\underbrace{\alpha + \alpha + \alpha + \alpha}_{m} = m\alpha$

αποδειξη:
1) $\alpha \cdot 0 = 0$

$0 + 0 = 0 \Rightarrow a(0+0) = \alpha 0 \overset{\text{επιμ.}}{\Longrightarrow}$ $\alpha 0 + \alpha 0 = a0 \Rightarrow a0 + a0 + (-a0) = \alpha 0 + (-a0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha 0 + 0 = 0 \Rightarrow a0 = 0$.

2) $\alpha(-b) = -\alpha b$

$\alpha b + (-ab) = 0$

$ab + \alpha(-b) = a(b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$. Σε μια αβελιανη ομαδα είναι ο αντιθετος μοναδικός αρα $-ab = \alpha(-b)$

Το ιδιο για $(-a)b = -ab$

3) $(-a)(-b) = -(-a)b = (-(-a))b = \alpha b$

4) και 5) απο το αθροισμα στην αβελιανη ομαδα $(R,+)$

Προταση: Εστω R δακτυλιος μοναδιαιος.

Τοτε $0 \neq 1$

μοναδιαιο προσθεσης — μοναδιαιο πολ/σμου

(Εδω υποθετω οτι ο R εχει τουλαχιστον δυο στοιχεια)

Αν $0 = 1 \Rightarrow \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 1 \Rightarrow 0 = a \ \forall a \in R \rightarrow$ ο δακτυλιος εχει μονο 1 στοιχει

Αν $R = \{0\}$ αδυνατο

Προταση(+): Εστω R μοναδιαιος. Αν το r είναι μοναδα, τοτε δεν είναι μηδενοδιαιρετης.

αποδειξη:

Εστω r μοναδα $\Leftrightarrow \exists r', r'' \in R$ με $rr' = 1 = r''r$

Υποθετουμε οτι είναι μηδενοδιαιρετης $\Leftrightarrow$

$\exists b \neq 0$ με $rb = 0 \Rightarrow r''rb = r''0 \Rightarrow 1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$

αδυνατο

Ορισμός: Σε έναν μοναδιαίο δακτύλιο, αν το r είναι μονάδα και $\exists r'$ με $rr' = r'r = 1$ τότε το r' θα το συμβολίζουμε με $r^{-1} = r'$.

Ορισμός: Ενας αντιμεταθετικός μοναδιαίος δακτύλιος καλείται ακέραια περιοχή, αν κάθε μη-μηδενικό στοιχείο του δεν είναι μηδενοδιαιρέτης. Δηλαδή δεν έχει μηδενοδιαιρέτες.

π.χ. Το σύνολο $R = \{ n + m\sqrt{2} \mid n, m \in \mathbb{Z} \}$ με τις συνήθεις πράξεις είναι ακέραια περιοχή.

Απο την πρόταση $\oplus$ έχουμε Σώμα $\Rightarrow$ Ακέραια Περιοχ
Το παράδειγμα μας λέει ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.
Να δείξουμε ότι το R δεν έχει μηδενοδιαιρέτε
Υποθέτουμε $\underset{\neq 0}{(n + m\sqrt{2})} \underset{\neq 0}{(k + \lambda\sqrt{2})} = 0$.

$\underset{0}{(nk + 2m\lambda)} + \underset{\text{και } 0}{(n\lambda + mk)}\sqrt{2} = 0 \rightarrow$

ακέραιοι $\neq$ άρρητος

$\left.\begin{array}{l} nk + 2m\lambda = 0 \\ n\lambda + m\lambda = 0 \end{array}\right\}$ Λύνουμε το σύστημα $\Rightarrow n = m = 0$, $k = \lambda = 0$
Αδύνατο